Jurnal Fisika Indonesia, No: 22, vol.VII. Edisi Desember 2003 ISSN:1410-2994, hal.26 – 34.

PENGGUNAAN TRANSFORMASI POINCARE DALAM ALGORITMA PENYUSUNAN HIMPUNAN KERANGKA ACUAN SESAAT BAGI PARTIKEL RELATIVISTIK YANG BERGERAK SEMBARANG

Arief Hermanto

Jurusan Fisika FMIPA Universitas Gadjah Mada

Intisari

Dirumuskan sebuah algoritma untuk menyusun himpunan kerangka acuan sesaat yang berpusat pada sebuah partikel relativistik yang bergerak secara sembarang. Dalam algoritma ini transformasi Poincare memegang peranan yang penting. Himpunan kerangka acuan sesaat ini dapat menggantikan kerangka acuan non-inersial yang berpusat pada partikel itu.

Kata-kata kunci: relativitas khusus, transformasi Poincare, algoritma

THE USE OF POINCARE TRANSFORMATION IN THE ALGORITHM TO CONSTRUCT THE SET OF INSTANTANEOUS REFERENCE FRAMES OF RELATIVISTIC PARTICLE MOVING ARBITRARILY

Abstract

An algorithm has been formulated to construct a set of instantaneous rest frames centered at a relativistic particle which moves arbitrarily. In this algorithm Poincare transformation has an important role. The set of instantaneous rest frames can be used as a substitute to non-inertial frame centered at the particle.

Key words: special relativity, Poincare transformation, algorithm

I. PENDAHULUAN

Ditinjau dari segi klasifikasi atau sistematika ilmu pengetahuan, status kerangka acuan non-inersial dalam teori relativitas agak kontroversial, yaitu akan dimasukkan ke dalam teori relativitas khusus atau teori relativitas umum (Ray, 1977). Ada yang berpendapat bahwa teori relativitas khusus hanya membahas kerangka acuan yang inersial saja. Itu berarti bahwa kerangka acuan non-inersial masuk dalam teori relativitas umum. Ada yang berpendapat lain, yaitu bahwa teori relativitas umum membahas situasi di mana terdapat medan gravitasi, yang ditandai dengan adanya kelengkungan ruang–waktu (yang secara matematik dinyatakan dengan tensor Riemann yang tidak nol). Dalam kerangka acuan non-inersial tensor Riemann nilainya nol, karena dengan menggunakan transformasi koordinat ruang-waktu yang tepat, kerangka acuan non-inersial dapat dibawa ke bentuk Minkowski. Itu berarti bahwa tidak ada kelengkungan ruang–waktu dalam kerangka acuan non-inersial. Kerangka acuan non-inersial adalah sistem koordinat ruang-waktu yang non-Minkowskian bagi ruang-waktu yang sebenarnya datar. Berdasarkan alasan ini, kerangka acuan non-inersial masuk ke dalam teori relativitas khusus.

Terlepas dari perdebatan di atas, konsep kerangka acuan non-inersial muncul ketika kita ingin menyusun sebuah kerangka acuan yang mengikuti gerakan sebuah partikel yang tidak bebas. Jika hanya tersedia kerangka acuan yang inersial kita dapat mengikuti gerakan partikel itu dengan menggunakan himpunan kerangka acuan inersial di mana partikel itu pada setiap saat berada dalam keadaan diam dalam salah satu kerangka acuan anggota himpunan itu. Pembahasan himpunan kerangka acuan sesaat jelas masuk dalam teori relativitas khusus.

II. KERANGKA ACUAN INERSIAL

Misalnya terdapat sebuah partikel yang bebas, yaitu tidak dikenai gaya apapun. Jika seandainya jagad raya hanya berisi sebuah partikel sehingga tidak ada interaksi apapun, maka partikel itu merupakan partikel bebas yang ideal. Dalam kenyataan jagad raya berisi banyak sekali partikel, sehingga untuk mendapatkan sebuah partikel yang bebas, kita harus dapat mengisolasi partikel itu dari berbagai interaksi yang mengenainya dari partikel-partikel lain. Jika kemudian partikel bebas itu dijadikan pusat sebuah sistem koordinat ruang-waktu, maka kita dapatkan kerangka acuan yang inersial (Gron, 1999). Di dalam kerangka acuan inersial ini, partikel bebas yang lainnya akan diam atau bergerak dengan kecepatan konstan.

Salah satu cara untuk menyatakan sebuah kerangka acuan adalah dengan membayangkan kerangka acuan itu tersusun atas banyak sekali partikel (bahkan pada prinsipnya tak berhingga banyak partikel) yang memenuhi ruang. Pada setiap partikel dilekatkan sebuah jam. Kerangka acuan inersial tersusun atas partikel-partikel bebas. Salah satu partikel itu berlaku sebagai pusat sistem koordinat. Partikel-partikel yang lainnya berada dalam keadaan diam relatif terhadap partikel pusat, yaitu jaraknya terhadap partikel pusat tetap terhadap waktu. Cara pengukuran jarak dalam relativitas khusus adalah dengan menggunakan cahaya (Anderson, 1969). Misalnya ditinjau dua partikel, yaitu partikel A dan partikel B. Pada suatu saat dari A dipancarkan sebuah pulsa cahaya ke B yang kemudian dipantulkan oleh B kembali ke A. Jarak antara partikel A dan partikel B tetap terhadap waktu jika selang waktu antara pemancaran dan penerimaan pulsa cahaya (yang diukur dengan jam yang melekat pada partikel A) tetap terhadap waktu, yaitu tidak bergantung pada saat kapan sinyal atau pulsa itu dipancarkan.

Sebuah kerangka acuan adalah himpunan partikel-partikel (yang cacahnya tak berhingga banyak karena memenuhi ruang) dengan suatu aturan gerak di antara partikel-partikel itu dan setiap partikel dilengkapi dengan jam. Jika kemudian setiap partikel itu diberi label yang berupa 3 bilangan real, maka kita dapatkan sebuah sistem koordinat. Dalam satu kerangka acuan dapat disusun tak berhingga banyak sistem koordinat bergantung pada cara pemberian label pada partikel-partikel penyusun kerangka acuan. Aturan gerak bagi partikel-partikel penyusun kerangka acuan inersial adalah bahwa semua partikel itu adalah partikel bebas dan jaraknya satu sama lain tetap.

III. SINKRONISASI JAM DALAM KERANGKA ACUAN INERSIAL

Salah satu cara sinkronisasi jam-jam yang melekat pada setiap partikel penyusun kerangka acuan inersial adalah dengan sinkronisasi Einstein. Jam yang melekat di pusat koordinat (titik O) digunakan sebagai acuan. Misalnya jam di titik A akan disinkronkan dengan jam di titik O itu. Pada saat t_1 (menurut jam di O) dipancarkan pulsa cahaya ke A dan kemudian pulsa cahaya itu dipantulkan oleh A kembali ke O. Jika pulsa cahaya itu diterima kembali di O pada saat t_2 (menurut jam di O), maka jam di A diatur sedemikian rupa sehingga ketika A memantulkan cahaya, jam di situ menunjukkan t_3, dengan

$t_3 = t_1 + (t_2 - t_1)/2 = (t_1 + t_2)/2$.

IV. KERANGKA ACUAN NON-INERSIAL

Untuk memudahkan pembicaraan, selanjutnya ditentukan sebuah kerangka acuan (disebut saja sebagai kerangka dasar), dan semua kerangka acuan inersial menggunakan sistem koordinat Kartesian. Sebuah kerangka acuan inersial yang lain (bukan kerangka acuan dasar) terdiri atas partikel-partikel bebas yang bergerak dengan kecepatan konstan jika dilihat dalam kerangka acuan dasar.

Sebuah peristiwa dalam ruang waktu ditandai menurut label dari partikel yang tepat berada di tempat peristiwa itu terjadi dan menurut waktu yang ditunjukkan jam yang melekat pada partikel itu. Label sebuah peristiwa terdiri atas 4 bilangan real. Sebuah peristiwa yang ditinjau dengan dua kerangka acuan mempunyai dua label sesuai dengan partikel dari masing-masing kerangka acuan yang digunakan untuk menandai peristiwa itu.

Kerangka acuan non-inersial terdiri atas partikel-partikel yang tidak bebas, dengan kata lain partikel-partikel penyusun kerangka acuan non-inersial tidak bergerak dengan kecepatan konstan menurut kerangka acuan dasar. Misalnya ada sebuah peristiwa dengan label (ξ,ψ,ζ,t) menurut kerangka acuan non-inersial dan label (x, y, z, t) menurut kerangka acuan dasar, maka terdapat hubungan antara kedua label itu yang disebut sebagai transformasi kerangka acuan.

IV. TRANSFORMASI POINCARE

Untuk menyederhanakan pembicaraan, ditinjau dua kerangka acuan, yaitu kerangka acuan dasar (K) dan sebuah kerangka acuan inersial lain (K') yang bergerak dengan sumbu-sumbu koordinat selalu saling sejajar dan sumbu x' berhimpit dengan sumbu x. Dilihat dalam K, kerangka K' bergerak ke arah sumbu x positif (ke kanan). Hubungan antara (x', y', z', t') dengan (x, y, z, t) disebut sebagai transformasi Poincare, yang dapat dinyatakan sebagai

$$(x'-x'_0) = \gamma[(x-x_0) - V(t-t_0)] \tag{1a}$$

$$y' = y \tag{1b}$$

$$z' = z \tag{1c}$$

$$(t'-t'_0) = \gamma[(t-t_0) - V(x-x_0)/c^2] \tag{1d}$$

dengan $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-0,5}$, dan V adalah kecepatan K' dilihat oleh K. Karena pada arah y dan z tidak terjadi perubahan, maka untuk selanjutnya hanya ditinjau transformasi dari (x, t) menjadi (x', t').

Berdasarkan bentuk transformasi Poincare dapat dilihat bahwa sebuah titik dari K' (yaitu $x' = x'_0$) berhimpit dengan sebuah titik dari K (yaitu $x = x_0$) pada saat yang ditunjukkan oleh jam yang melekat pada masing-masing titik (partikel), yaitu t_0 (menurut titik di K) dan t'_0 (menurut titik di K'). Transformasi Lorentz adalah sebuah kasus khusus di mana kedua titik yang berhimpit itu dipilih pusat koordinat masing-masing kerangka acuan dan jam pada masing-masing titik diatur bersamaan menunjuk nol, sehingga $x_0 = x'_0 = t_0 = t_0' = 0$.

VI. SEBUAH CONTOH PENGGUNAAN TRANSFORMASI POINCARE

Sebagai contoh, transformasi Poincare akan digunakan untuk membahas paradoks kembar. Di dalam kerangka K misalnya ada partikel P yang bergerak ke arah sumbu x positif dengan kecepatan V. Partikel ini (yang dilengkapi dengan jam pribadi) melewati O (pusat dari kerangka K) pada saat $t = 0$ (menurut jam di O). Pada saat melewati O itu jam pribadi P juga diatur sehingga menunjuk nol. Setelah sampai di titik S ($x = L$) partikel P lalu berbalik arah sehingga bergerak dengan kecepatan $-V$ menuju O kembali. Jika kemudian P sampai di O kembali pada saat $t = T$ (menurut jam di O), kita ingin mengetahui saat yang ditunjukkan jam pribadi P.

Gerakan P dapat dibagi dalam dua tahap, yaitu tahap pertama (gerakan ke kanan, menjauhi O) dan tahap kedua (gerakan ke kiri, menuju O kembali). Pada tahap pertama, P berhimpit dengan pusat kerangka K' yang bergerak ke kanan terhadap K dengan kecepatan V. Ketika P sampai di S peristiwanya adalah $x = L$, $t = L/V$. Peristiwa ini bersesuaian dengan $x' = 0$ sehingga

$$t' = \gamma(t - Vx/c^2) = \gamma[(L/V) - VL/c^2] = (L/V)/\gamma$$

Ketika sampai di S, P berpindah ke kerangka acuan baru, yaitu K" yang bergerak dengan kecepatan $-V$ terhadap K. Partikel P diletakkan di pusat K". Di sinilah diperlukan transformasi Poincare antara K dan K". Peristiwa berhimpitnya P (atau O") dengan titik S dijadikan acuan, sehingga $x_0'' = 0$, sedangkan t_0'' ditentukan berdasarkan waktu yang ditunjukkan jam yang berada di O" (dalam hal ini adalah jam pribadi P); berarti $t_0'' = (L/V)/\gamma$. Untuk kerangka K, peristiwa berhimpitnya titik P (atau O") di S dapat dinyatakan sebagai $x_0 = L$, $t_0 = L/V$.

Ketika P sampai kembali di O, peristiwa itu dinyatakan di K sebagai $x = 0$, $t = 2L/V$. Dalam K" peristiwa itu dinyatakan dengan $x'' = 0$. Berdasarkan persamaaan (1a) dapat dituliskan

$$(x''-x''_0)=\gamma[(x-x_0)+V(t-t_0)] \qquad (2)$$

dengan mengingat bahwa K" bergerak dengan kecepatan $-V$ terhadap K.

Persamaan (2) dapat digunakan untuk menguji konsistensi. Dari persamaan (1d) dapat diperoleh

$$(t''-t''_0)=\gamma[(t-t_0)+V(x-x_0)/c^2] \qquad (3)$$

sehingga t'' (yang merupakan penunjukan jam yang dibawa P ketika sampai di O) dapat ditentukan dan diperoleh

$$\tau=2(L/V)/\gamma \qquad (4)$$

Hubungan antara umur saudara kembar yang inersial (T) dengan saudara kembar yang non-inersial (τ) dapat dituliskan

$$\tau=T/\gamma \qquad (5)$$

yang berarti saudara kembar yang non-inersial secara objektif lebih muda dari pada yang inersial.

VII. ALGORITMA PENYUSUNAN HIMPUNAN KERANGKA ACUAN SESAAT

Dalam contoh di atas, kerangka K dan K" merupakan kerangka acuan sesaat bagi partikel P. Partikel P bukanlah partikel bebas, karena ketika sampai di S partikel itu dapat berbalik arah. Sebenarnya dalam contoh di atas kita sudah menyusun himpunan kerangka acuan sesaat bagi partikel P (yang bergerak secara khusus, yaitu satu kali mengalami gaya impulsif di S). Dengan meninjau kasus yang umum, kita akan dapat menyusun algoritma penyusunan himpunan kerangka acuan sesaat.

Algortima penyusunan himpunan kerangka acuan sesaat bagi sebuah partikel yang bergerak secara sembarang dapat dinyatakan sebagai berikut.

Langkah ke 1. Kita menentukan sebuah kerangka acuan inersial dasar untuk menyatakan gerak partikel P. Dalam kerangka acuan ini ditentukan selang waktu yang kemudian dibagi menjadi banyak interval. Posisi dan kecepatan P pada setiap saat dapat ditentukan sehingga diperoleh himpunan $\{(t_i, v_i, x_i),\ i = 1,2,\ldots, N\}$.

Langkah ke 2. Ditinjau kasus i = 1. Dilakukan transformasi Poincare dari $K^{(0)}$ (kerangka acuan dasar) ke $K^{(1)}$ (kerangka acuan sesaat untuk i = 1) dengan nilai-nilai tetapan transformasi $x_0^{(0)} = x_1$, $t_0^{(0)} = t_1$ dan $x_0^{(1)} = 0$, $t_0^{(1)} = 0$, sedangkan tetapan kecepatan adalah $V = v_1$. Secara simbolik persamaan transformasi Poincare dapat dinyatakan sebagai

$$(x^{(1)}, t^{(1)}) = \hat{P}(x^{(0)}, t^{(0)}), \tag{6}$$

dengan $\hat{P}$ menyatakan operator transformasi Poincare. Persamaan (6) dapat dituliskan kembali menjadi

$$t^{(1)} = \hat{Q}(x^{(0)}, t^{(0)}, x^{(1)}). \tag{7}$$

Langkah ke 3. Ditinjau kasus i = 2. Dilakukan transformasi Poincare dari $K^{(0)}$ (kerangka acuan dasar) ke $K^{(2)}$ (kerangka acuan sesaat untuk i = 2) dengan nilai-nilai tetapan transformasi $x_0^{(0)} = x_2$, $t_0^{(0)} = t_2$ dan $x_0^{(2)} = 0$, $t_0^{(2)} = \hat{Q}(x_2, t_2, 0)$.

Langkah ke 4: Langkah ke 3 diulang untuk kasus i = 3 dan seterusnya sampai i = N. Pada akhirnya kita akan mendapatkan N buah transformasi Poincare dari $K^{(0)}$ ke $K^{(i)}$, i = 1, 2, ..., N. Dengan kata lain kita dapatkan N buah kerangka acuan sesaat bagi partikel P.

VIII. KESIMPULAN

Himpunan kerangka acuan sesaat bagi sebuah partikel dapat digunakan untuk menggantikan atau setara dengan kerangka acuan non-inersial yang berpusat di P, tentu saja dengan kekurangan dan kelebihan masing-masing. Kelebihan dari himpunan kerangka acuan sesaat adalah sifatnya yang inersial sehingga tidak ditemukan geometri yang non-Euklidean. Kekurangannya adalah pada perubahan dari kerangka acuan sesaat yang satu ke kerangka berikutnya yang bersifat mendadak. Dalam pengertian tertentu, himpunan kerangka acuan sesaat ini boleh dikatakan sebagai diskretisasi terhadap kerangka acuan nonperubahan dari kerangka acuan sesaat yang satu ke kerangka berikutnya yang bersifat mendadak. Dalam pengertian tertentu, himpunan kerangka acuan sesaat ini boleh dikatakan sebagai diskretisasi terhadap kerangka acuan non-inersial yang bersifat kontinyu ketika mengikuti partikel P sebagai pusatnya. Dalam kerangka acuan non-inersial dapat dijumpai geometri yang non-Euklidean.

DAFTAR ACUAN

Anderson, J.L. dan Gautreau, R., 1969, Operational approach to space and time measurements in flat space, *American Journal of Physics*, **37**, 178.

Gron, O. dan Voyenli, K., 1999, On the foundation of the principle of relativity, *Foundations of Physics*, **29**, 1695.

Ray, J. R., 1977, Principle of equivalence, *American Journal of Physics*, **45**, 402.